Подготовка к контрольной работе № 2 по теме «Степени, показательные уравнения и неравенства» для всех специальностей 1 курса

1) ДЕЙСТВИЯ СО СТЕПЕНЯМИ

Фомулы

1) $a^0 = 1$
2) $a^1 = a$
3) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$
5) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
6) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
7) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
8) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
9) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
10) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Примеры:

1) $$\frac{5^{-2} \cdot \sqrt{125}}{25^{0,5}} = 5^{-2} \cdot \left(5^3\right)^{\frac{1}{2}} : \left(5^2\right)^{0,5} = 5^{-2} \cdot 5^{\frac{3}{2}} : 5^1 = 5^{-2+\frac{3}{2}-1} = 5^{\frac{-4+3-2}{2}} = 5^{-\left(\frac{3}{2}\right)}$$

2) $$\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^4 + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)} - (5,2)^0 = \left(\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}\right)^4 + 27^{\frac{1}{3}} - 1 = 2^4 + \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 16 + 3 - 1 = 18$$

2) ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Показательным называется уравнение, в котором неизвестная X содержится в показателе степени.

Примеры: $2^{3x-1} = 2^{5-2x}$

$7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$

$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} - 69 = 0$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 4 - x$

Методы решения показательных уравнений

1. **Метод приведения к одному основанию**

если в уравнении имеется два слагаемых в виде степеней, которые можно привести к *одному основанию, то надо:*

1- перенести слагаемые в разные стороны

2- привести степени к одному основанию т.е. получить уравнение вида $a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)}$

3- приравнять показатели степеней т.е. $f_1(x) = f_2(x)$

4- решить получившееся уравнение

Пример 1: $3^{4x-1} = 9^x$

Решение:

$$3^{4x-1} = 9^x$$

$$3^{4x-1} = \left(3^2\right)^x$$

$$3^{4x-1} = 3^{2\cdot x}$$

$$4x - 1 = 2x$$

$$4x - 2x = 1$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$

2. **Метод вынесения общего множителя за скобки**

если в уравнении несколько слагаемых в виде степеней с одинаковым основанием и коэффициенты перед переменной X одинаковые, то надо:

1- слагаемое без X перенести в другую часть уравнения

2- найти <u>наименьший</u> показатель степени

3- выделить у каждой степени наименьший показатель (если его там нет)

4- раскрыть сумму в показателе степени по формуле $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

5- выделить у каждого слагаемого степень с наименьшим показателем и вынести этот общий множитель за скобки

6- упростить получившееся уравнение и привести его к виду $a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)}$

7- приравнять показатели степеней т.е. $f_1(x) = f_2(x)$ и решить получившееся уравнение

Пример 2: $2^{x+1}+3\cdot 2^{x-1}-5\cdot 2^{x}+6=0$

Решение:

$2^{x+1}+3\cdot 2^{x-1}-5\cdot 2^{x}+6=0$

$2^{x+1}+3\cdot 2^{x-1}-5\cdot 2^{x}=-6$

$2^{(x-1)+2}+3\cdot 2^{x-1}-5\cdot 2^{(x-1)+1}=-6$

$2^{(x-1)}\cdot 2^{2}+3\cdot 2^{x-1}-5\cdot 2^{(x-1)}\cdot 2^{1}=-6$

$2^{x-1}\cdot 4+3\cdot 2^{x-1}-5\cdot 2^{x-1}\cdot 2=-6$

$2^{x-1}\cdot(1\cdot 4+3\cdot 1-5\cdot 1\cdot 2)=-6$

$2^{x-1}\cdot(4+3-10)=-6$

$2^{x-1}\cdot(-3)=-6$

$2^{x-1}=\dfrac{-6}{-3}$

$2^{x-1}=2$

$2^{x-1}=2^{1}$

$x-1=1$

$x=1+1$

$x=2$

Ответ: $x=2$

3. **Метод приведения к квадратному уравнению**

если в уравнении три слагаемых, два из которых это степени с одинаковым основанием и коэффициенты перед X в два раза больше (или противоположные по знаку), то надо:

1- найти <u>степень с наименьшим показателем</u> и заменить её на новую переменную

2- записать получившееся квадратное уравнение относительно новой переменной

3- решить квадратное уравнение (относительно новой переменной)

4- вернуться к замене и решить получившиеся простые уравнения вида $a^{f_1(x)}=a^{f_2(x)}$

Пример 3: $2^{2x}-5\cdot 2^{x}+4=0$

Решение:

$2^{2x}-5\cdot 2^{x}+4=0$

$\textit{Замена}:\ 2^{x}=t$

$t^{2}-5\cdot t+4=0$

$D=(-5)^{2}-4\cdot 1\cdot 4=25-16=9$

$\sqrt{D}=3$

$$t_{1,2}=\frac{-(-5)\pm 3}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 3}{2}\left[\begin{array}{l} t_1=4 \\ t_2=1 \end{array}\right.$$

Вернемся к замене $2^{x}=t$

$t_1=4 \Rightarrow \quad 2^{x}=4$

$2^{x}=2^{2}$

$x=2$

$t_1=1 \Rightarrow \quad 2^{x}=1$

$2^{x}=2^{0}$

$x=0$

Ответ: x=2, x=1

3) ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Показательным называется неравенство, в котором неизвестная Х содержится в показателе степени

Примеры:

$$4^{2-3x}\le\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x-3}\ge\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$$

План решения показательных неравенств:

1) Перенести слагаемые в разные стороны неравенства
2) Привести степени к одному основанию т.е. к виду $a^{f_1(x)}\le a^{f_2(x)}$
3) Выписать основание «a»

   - если $a>1$, то функция возрастает и знак неравенства **сохраняем** между показателями степеней т.е. $f_1(x)\le f_2(x)$

   если $0<a<1$, то функция убывает и знак неравенства **меняем** между показателями степеней т.е. $f_1(x)\ge f_2(x)$

4) Решить получившееся неравенство, отметить штриховку на прямой

5) Записать ответ

Пример 4: $5^{2x+6} \le \frac{1}{25}$

Решение:

$$5^{2x+6} \le \frac{1}{25}$$

$$5^{2x+6} \le \frac{1}{5^2}$$

$$5^{2x+6} \le 5^{-2}$$

$$a = 5, \quad a > 1, \quad f \uparrow, \quad \textit{знак} \quad \textit{неравенства} \quad \textit{сохраняем}$$

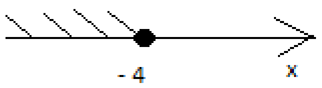
$$2x + 6 \le -2$$

$$2x \le -2 - 6$$

$$2x \le -8$$

$$x \le \frac{-8}{2}$$

$$x \le -4$$



Ответ: $x \in (-\infty; -4]$

Пример 5: $\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} > \left(\frac{27}{8}\right)^{x}$

Решение:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} > \left(\frac{27}{8}\right)^{x}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} > \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\right)^{x}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} > \left(\frac{3}{2}\right)^{3\cdot x}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-3\cdot x}$$

$$a=\frac{2}{3},\quad 0<a<1,\quad f\downarrow,\quad \text{знак}\quad \text{неравенства}\quad \text{меняем}$$

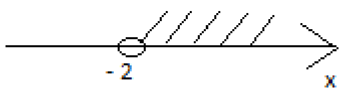
$$4-x>-3x$$

$$-x+3x>-4$$

$$2x>-4$$

$$x>\frac{-4}{2}$$

$$x>-2$$



Ответ: $x\in(-2;+\infty)$

3) ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Вычислите $\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} + \left(\sqrt{3}\right)^0$

2. Решите уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = 16^x$

3. Решите неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{3+x} \geq \left(\frac{25}{4}\right)^x$

4. Решите уравнение $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

5. Решите уравнение $2^{x+2} + 3 \cdot 2^x - 2^{x-1} - 26 = 0$